Departamento
de Matemáticas

Cálculo para la Edificación (UEX500975)

2024-2025 – Estudio Skywalk (primera tarea optativa)

(Un esquema de resolución)

Profesor:
Juan Miguel León Rojas

♦ Estudiemos el apartado 6.6 del libro Cálculo. Volumen I. (OpenStax —Rice University—) (https://campusvirtual.unex.es/zonauex/avuex/mod/url/view.php?id=1676189), (acceso directo: https://openstax.org/books/c%C3%A1lculo-volumen-1/pages/6-6-momentos-y-centros-de-masa).

▶ Realicemos el proyecto de estudiante «El mirador de cristal Skywalk del Gran Cañón» (págs. 652 a 654).

Observaciones: ▪ Somos libres de añadir lo que consideremos oportuno. ▪ El documento que entreguemos debe estar por completo escrito a mano, con letra clara, siendo su entrega en mano. ▪ Puntuación máxima: 1,5 puntos sobre la calificación final de la asignatura. ▪ Fecha de propuesta: miércoles 6 de noviembre de 2024. ▪ Fecha límite de entrega: jueves 19 de diciembre a las 11:30, en el aula A1.

Esquema de resolución.—

Usamos el sistema común de unidades de Estados Unidos de América, con las siguientes unidades: de longitud, el pie (ft); de masa, el slug; de fuerza, la libra (lb). Aunque como valor de la aceleración de la gravedad suele tomarse en este sistema $32{,}2\,\mathrm{ft/s^2}$, siguiendo el enunciado tomamos por su valor $32\,\mathrm{ft/s^2}$. Redondearemos a tres decimales.

1.— Sean A_1, A_2 y A_3 las áreas de las subregiones R_1, R_2 y R_3, respectivamente. El área de una corona circular de radio menor r y radio mayor R es $\pi(R^2 - r^2)$, es por esto que

$$A_1 = \frac{\pi}{2}\left(35^2 - 25^2\right) = \frac{\pi}{2}600 = 300\pi \approx 942{,}478\,\mathrm{ft^2}.$$

El área de un rectángulo de base b y altura h es bh, es por esto que como R_2 está formada por dos rectángulos de iguales dimensiones, $b = 10\,\mathrm{ft}$ y $h = 35\,\mathrm{ft}$, y R_3 está formada por dos rectángulos de iguales dimensiones, $b = 10\,\mathrm{ft}$ y $h = 48\,\mathrm{ft}$, entonces

$$A_2 = 2 \cdot 10 \cdot 35 = 700\,\mathrm{ft^2};$$
$$A_3 = 2 \cdot 10 \cdot 48 = 960\,\mathrm{ft^2}.$$

2.— El peso de un objeto se define como el producto de la masa por la aceleración de la gravedad; por esto, la masa de la plataforma es $m_P = \dfrac{1\,200\,000\,\mathrm{lb}}{32\,\mathrm{ft/s^2}} = 37\,500$ slugs.

La densidad superficial de un material se define como la cantidad de masa por unidad de área; por esto, la densidad superficial de la lámina es $\rho = \dfrac{37\,500}{300\pi + 700 + 960} \approx 14{,}409\,\mathrm{slugs/ft^2}$.

Por lo anterior, las masas m_1, m_2 y m_3 respectivas de las subregiones R_1, R_2 y R_3 son:

$$m_1 = \rho \cdot A_1 = \frac{37\,500}{300\pi + 700 + 960}\,\mathrm{slugs/ft^2} \cdot 300\pi\,\mathrm{ft^2} \approx 13\,580{,}488 \text{ slugs};$$
$$m_2 = \rho \cdot A_2 = \frac{37\,500}{300\pi + 700 + 960}\,\mathrm{slugs/ft^2} \cdot 700\,\mathrm{ft^2} \approx 10\,086{,}541 \text{ slugs};$$
$$m_3 = \rho \cdot A_3 = \frac{37\,500}{300\pi + 700 + 960}\,\mathrm{slugs/ft^2} \cdot 960\,\mathrm{ft^2} \approx 13\,832{,}971 \text{ slugs}.$$

(Como es lógico, $13\,580{,}488 + 10\,086{,}541 + 13\,832{,}971 = 37\,500$).

3.— Como las tres subregiones son simétricas con respecto al eje de ordenadas, las abcisas de sus centros de masas son $\overline{x}_1 = \overline{x}_2 = \overline{x}_3 = 0$.

Por otra parte, como las regiones R_2 y R_3 son simétricas con respecto a sus ejes horizontales medios, las ordenadas de sus centros de masas son $\overline{y}_2 = \dfrac{-35}{2} = -17{,}5$ e $\overline{y}_3 = -35 - \dfrac{48}{2} = -59$.

Sólo falta calcular la ordenada del centro de masas de R_1. Esta región está acotada superiormente por $f(x) = \sqrt{35^2 - x^2}$ e inferiormente por $g(x) = \sqrt{25^2 - x^2}$ si $-25 \leq x \leq 25$ y $g(x) = 0$ si $-35 \leq x \leq -25$ o si $25 \leq x \leq 35$. Su momento con

©2025, Juan Miguel León Rojas; metaLicencia ✝ Gratuidad Cristiana (CGL 10.30) <http://gratuidadcristiana.blogspot.com/>.

respecto del eje de abcisas es:

$$\begin{aligned}
M_1^x &= \frac{\rho}{2}\int_{-35}^{35}\left((f(x))^2-(g(x))^2\right)\,dx = \frac{\rho}{2}\int_{-35}^{-25}\left((f(x))^2-0^2\right)\,dx + \frac{\rho}{2}\int_{-25}^{25}\left((f(x))^2-(g(x))^2\right)\,dx + \frac{\rho}{2}\int_{25}^{35}\left((f(x))^2-0^2\right)\,dx\\
&= \frac{\rho}{2}\int_{-35}^{-25}(f(x))^2\,dx + \frac{\rho}{2}\int_{-25}^{25}(f(x))^2\,dx - \frac{\rho}{2}\int_{-25}^{25}(g(x))^2\,dx + \frac{\rho}{2}\int_{25}^{35}(f(x))^2\,dx\\
&= \frac{\rho}{2}\int_{-35}^{35}(f(x))^2\,dx - \frac{\rho}{2}\int_{-25}^{25}(g(x))^2\,dx\\
&= \frac{\rho}{2}\int_{-35}^{35}(35^2-x^2)\,dx - \frac{\rho}{2}\int_{-25}^{25}(25^2-x^2)\,dx\\
&= \frac{\rho}{2}\left(35^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-35}^{35} - \frac{\rho}{2}\left(25^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-25}^{25}\\
&= \frac{\rho}{2}\left(35^3-\frac{1}{3}35^3+35^3-\frac{1}{3}35^3\right) - \frac{\rho}{2}\left(25^3-\frac{1}{3}25^3+25^3-\frac{1}{3}25^3\right)\\
&= \frac{54\,500}{3}\rho,
\end{aligned}$$

por lo que $\overline{y}_1 = \dfrac{M_1^x}{m_1} = \dfrac{54\,500\rho/3}{300\pi\rho} \approx 19{,}275$. En definitiva, $\left(\overline{x}_1, \overline{y}_1\right) \approx (0; 19{,}275)$, $\left(\overline{x}_2, \overline{y}_2\right) = (0; -17{,}5)$ y $\left(\overline{x}_3, \overline{y}_3\right) = (0; -59)$.

4.— Sea $\left(\overline{x}_P, \overline{y}_P\right)$ el centro de masas de la plataforma. Como ésta es simétrica con respecto al eje de ordenadas, $\overline{x}_P = 0$. Sólo falta calcular la ordenada $\overline{y}_P$ del centro de masas de la plataforma. Hallémosla. El momento con respecto al eje de abcisas es

$$\begin{aligned}
M_P^x &= \sum_{i=1}^{3} m_i \overline{y}_i\\
&= \rho\cdot 300\pi\cdot\frac{54\,500\rho/3}{300\pi\rho} + \rho\cdot 700\cdot(-17{,}5) + \rho\cdot 960\cdot(-59)\\
&= \rho\left(\frac{54\,500}{3} + 700\cdot(-17{,}5) + 960\cdot(-59)\right)\\
&= \frac{37\,500}{300\pi+700+960}\cdot\left(\frac{54\,500}{3} + 700\cdot(-17{,}5) + 960\cdot(-59)\right)\\
&\approx -730\,890{,}001,
\end{aligned}$$

por lo que $\overline{y}_P = \dfrac{M_P^x}{m_P} = \dfrac{M_P^x}{37\,500} \approx -19{,}490$. En definitiva, $\left(\overline{x}_P, \overline{y}_P\right) \approx (0; -19{,}490)$.

El centro de masas está en el aire, a una distancia aproximada de 15,51 pies del muro del cañón.

5.— La masa del centro de visitantes es $m_V = \dfrac{2\,200\,000\,\text{lb}}{32\,\text{ft/s}^2} = 68\,750\,\text{slugs}$. Su centro de masas es el de R_3, esto es, $\left(\overline{x}_V, \overline{y}_V\right) = (0; -59)$.

¿Cuál es el centro de masas del sistema $\left(\overline{x}_S, \overline{y}_S\right)$? Como el sistema es simétrico con respecto al eje de ordenadas, $\overline{x}_S = 0$. Sólo falta calcular la ordenada $\overline{y}_S$ del centro de masas del sistema. Hallémosla. La masa del sistema es $m_S = m_P + m_V = 37\,500\,\text{slugs} + 68\,750\,\text{slugs} = 106\,250\,\text{slugs}$. El momento con respecto al eje de abcisas es

$$\begin{aligned}
M_S^x &= m_P\overline{y}_P + m_V\overline{y}_V\\
&= m_P\cdot\frac{M_P^x}{m_P} + 68\,750\cdot(-59)\\
&= M_P^x + 68\,750\cdot(-59)\\
&= \frac{37\,500}{300\pi+700+960}\cdot\left(\frac{54\,500}{3} + 700\cdot(-17{,}5) + 960\cdot(-59)\right) + 68\,750\cdot(-59)
\end{aligned}$$

©2025, Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30) <http://gratuidadcristiana.blogspot.com/>.

$$\approx -4\,787\,140{,}001,$$

por lo que $\overline{y}_S = \dfrac{M_S^x}{m_S} = \dfrac{M_S^x}{106\,250} \approx -45{,}055$. En definitiva, $\left(\overline{x}_S, \overline{y}_S\right) \approx (0; -45{,}055)$.

El centro de masas está en el centro de visitantes, en tierra, a una distancia aproximada de 10,055 pies del muro del cañón.

6.— La masa de las 800 personas es $m_{800} = \dfrac{800 \cdot 200\,\text{lb}}{32\,\text{ft/s}^2} = 5000\,\text{slugs}$. Como hemos representado a estas personas por una masa puntual situada en el borde más alejado de la plataforma, a 70 pies del muro del cañón, en el eje de ordenadas, la abcisa de su centro de masas, por simetría respecto al eje de ordenadas, es $\overline{x}_{800} = 0$ y la ordenada de su centro de masas es $\overline{y}_{800} = \dfrac{70}{2} = 35$, esto es, su centro de masas es $\left(\overline{x}_{800}, \overline{y}_{800}\right) = (0; 35)$.

¿Cuál es el centro de masas del sistema con las 800 personas $\left(\overline{x}_{\boxplus}, \overline{y}_{\boxplus}\right)$? Como el sistema con las 800 personas es simétrico con respecto al eje de ordenadas, $\overline{x}_{\boxplus} = 0$. Hallemos $\overline{y}_{\boxplus}$. La masa del sistema con las 800 personas es $m_{\boxplus} = m_S + m_{800} = 106\,250\,\text{slugs} + 5000\,\text{slugs} = 111\,250\,\text{slugs}$. El momento con respecto al eje de abcisas es

$$\begin{aligned}
M_{\boxplus}^x &= m_S\overline{y}_S + m_{800}\overline{y}_{800} \\
&= m_S \cdot \frac{M_S^x}{m_S} + 5000 \cdot 35 \\
&= M_S^x + 5000 \cdot 35 \\
&= \frac{37\,500}{300\pi + 700 + 960} \cdot \left(\frac{54\,500}{3} + 700 \cdot (-17{,}5) + 960 \cdot (-59)\right) + 68\,750 \cdot (-59) + 5000 \cdot 35 \\
&= -4\,612\,140{,}001,
\end{aligned}$$

por lo que $\overline{y}_{\boxplus} = \dfrac{M_{\boxplus}^x}{m_{\boxplus}} = \dfrac{M_{\boxplus}^x}{111\,250} \approx -41{,}457$. En definitiva, $\left(\overline{x}_{\boxplus}, \overline{y}_{\boxplus}\right) \approx (0; -41{,}457)$.

Aún suponiendo, como hemos hecho, que las 800 personas están todas juntas en el extremo del balcón en voladizo, el centro de masas está en el centro de visitantes, en tierra, a una distancia aproximada de 6,457 pies del muro del cañón.

Para saber más

Strang, Gilbert, y Herman, Edwin "Jed", *Cálculo. Volumen 1*, Rice University, ISBN-13: 978-1-951693-51-0. `https://openstax.org/details/books/c%C3%A1lculo-volumen-1`

Strang, Gilbert, y Herman, Edwin "Jed", *Cálculo. Volumen 2*, Rice University, ISBN-13: 978-1-951693-52-7. `https://openstax.org/details/books/c%C3%A1lculo-volumen-2`

Strang, Gilbert, y Herman, Edwin "Jed", *Cálculo. Volumen 3*, Rice University, ISBN-13: 978-1-951693-53-4. `https://openstax.org/details/books/c%C3%A1lculo-volumen-3`

Es muy recomendable el estudio de estos textos para el aprendizaje de la teoría y práctica del cálculo diferencial e integral de una y varias variables.

©2025, Juan Miguel León Rojas; metaLicencia ✝ Gratuidad Cristiana (CGL 10.30) <http://gratuidadcristiana.blogspot.com/>.